تصحيح الامتحان الوطني الموحد للباكالوريا
الدورة الاستدراكية 2020 "شعبة العلوم التجريبية الرياضية (أ) و (ب) "
الفيزياء والكيمياء

التمرين 1 : الكيمياء (6,5 نقط)

الجزء I :عمود ثنائي اليود-زنك

1-منحى التطور التلقائي للمجموعة:

$$\mathbf{I_{2(aq)} + Zn_{(s)} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}} 2I^-_{(aq)} + Zn^{2+}_{(aq)}}$$

خارج التفاعل $Q_{r,i}$ في الحالة البدئية يكتب :

$$Q_{r,i} = \frac{[I^-]_i^2.[Zn^{2+}]_i}{[I_2]_i} \Rightarrow Q_{r,i} = \frac{(5{,}0.10^{-2})^2 \times 0{,}10}{0{,}1} \Rightarrow \boxed{Q_{r,i} = 2{,}5.10^{-3}}$$

$$Q_{r,i} < K = 10^{46}$$

حسب معيار التطور التلقائي تتطور المجموعة الكيميائية تلقائيا في المنحى المباشر (1) منحى تكون I^- و Zn^{2+} .

2-معادلة التفاعل التي تحدث بجوار الكاثود:

يحدث اختزال كاثودي ل I_2 بجوار الكاثود: $\mathbf{I_{2(aq)} + 2e^- \rightleftarrows 2I^-_{(aq)}}$

3-لنبين ان $n_C(I_2) = 7\ mmol$:

حسب معادلة تفاعل المعايرة : $\mathbf{I_{2\,(aq)} + 2S_2O_3^{2-}{}_{(aq)} \longrightarrow 2I^-_{(aq)} + S_4O_6^{2-}{}_{(aq)}}$

علاقة التكافؤ : $\frac{C_r.V_E}{2} = n_R(I_2) \quad \Leftrightarrow n_{versé}(S_2O_3^{2-}) = n_R(I_2)$

لدينا : $\underbrace{n_0(I_2)}_{\text{بدئية}} = \underbrace{n_R(I_2)}_{\text{متبقية}} + \underbrace{n_C(I_2)}_{\text{مستهلكة}} \quad \Rightarrow n_C(I_2) = n_0(I_2) - n_R(I_2)$

$$\boxed{n_C(I_2) = C_1.V - \frac{C_r.V_E}{2}}$$

ت.ع : $n_C(I_2) = 0{,}10 \times 100.10^{-3} - \frac{0{,}30\times 20.10^{-3}}{2} = 7.10^{-3}mol \Rightarrow \boxed{n_e(I_2) = 7\ mmol}$

4-تعبير Δt بدلالة I_0 و F و $n_C(I_2)$:

الجدول الوصفي:

معادلة التفاعل		$I_{2(aq)}$ +	$Zn_{(s)}$ ⇄		$2I^-_{(aq)}$ +	$Zn^{2+}_{(aq)}$	كمية مادة الالكترونات
حالة المجموعة	التقدم	كميات المادة بالمول					
البدئية	0	$C_1.V$	بوفرة	-	$C_2.V$	$C_0.V$	$n(e^-) = 0$
بعد تمام Δt	x	$C_1.V - x$	بوفرة	-	$C_2.V + 2x$	$C_0.V + x$	$n(e^-) = 2x$

حسب الجدول الوصفي:

$$\begin{cases} n(e^-) = 2x \\ n_C(I_2) = x \end{cases} \Longrightarrow n(e^-) = 2n_C(I_2)$$

لدينا:

$$\begin{cases} Q = I_0.\Delta t \\ Q = F.n(e^-) \end{cases} \Longrightarrow F.n(e^-) = I_0.\Delta t \Longrightarrow \Delta t = \frac{F.n(e^-)}{I_0} \Longrightarrow \boxed{\Delta t = \frac{2F.n_C(I_2)}{I_0}}$$

ت.ع:
$$\Delta t = \frac{2\times 9{,}65.10^4\times 7.10^{-3}}{70.10^{-3}} \Longrightarrow \boxed{\Delta t = 1{,}93.10^4\ s}$$

5. حساب $[Zn^{2+}]$ عند تمام Δt :

حسب الجدول الوصفي:

$$[Zn^{2+}] = \frac{C_0.V + x}{V} = C_0 + \frac{x}{V}$$

لدينا :
$$n(e^-) = 2n_C(I_2) \Longrightarrow 2x = 2n_C(I_2) \Longrightarrow x = n_C(I_2)$$

$$\boxed{[Zn^{2+}] = C_0 + \frac{n_C(I_2)}{V}}$$

ت.ع:
$$[Zn^{2+}] = 0{,}1 + \frac{7.10^{-3}}{100.10^{-3}} \Longrightarrow \boxed{[Zn^{2+}] = 0{,}17\ mol.L^{-1}}$$

الجزء II : التفاعلات حمض-قاعدة

1-معادلة تفاعل المعايرة:

$$\mathbf{C_nH_{2n+1}COOH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \longrightarrow C_nH_{2n+1}COO^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}}$$

2-تحديد التركيز C_A :

علاقة التكافؤ:
$$C_A.V_A = C_B.V_{BE} \Longrightarrow C_A = \frac{C_B.V_{BE}}{V_A}$$

ت.ع :
$$C_A = \frac{0{,}10\times 10{,}0}{10{,}0} \Longrightarrow \boxed{C_A = 0{,}10\ mol.L^{-1}}$$

-استنتاج صيغة الحمض :

الكتلة المولية للحمض:

$$M(C_nH_{2n+1}COOH) = 12n + (2n+1)\times 1 + 12 + 16\times 2 + 1 = 14n + 46$$

$$C_A = \frac{m}{M.V} \Longrightarrow M = \frac{m}{C_A.V} \Longrightarrow 14n + 46 = \frac{m}{C_A.V} \Longrightarrow \boxed{n = \frac{m}{14C_A.V} - \frac{46}{14}} \Longrightarrow$$

$$n = \frac{2{,}3}{14\times 0{,}10\times 0{,}1} - \frac{46}{14} \Longrightarrow \boxed{n = 0}$$

صيغة الحمض هي HCOOH .

3-1-تحديد τ نسبة التقدم النهائي:

لدينا :
$$\tau = \frac{x_f}{x_{max}}$$

جدول التقدم:

معادلة التفاعل	$HCOOH_{(aq)}$ +	$H_2O_{(l)}$	$\rightleftarrows$	$HCOO^-_{(aq)}$ +	$H_3O^+_{(aq)}$
الحالة البدئية	$C_A.V$	بوفرة	--	0	0
حالة التوازن	$C_A.V - x_{éq}$	بوفرة	--	$x_{éq}$	$x_{éq}$

حسب الجدول الوصفي : $x_{max} = C_A.V$ و $x_{éq} = [H_3O^+]_{éq}.V = 10^{-pH}.V$

$$\tau = \frac{10^{-pH}.V}{C_A.V} \Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{10^{-pH}}{C_A}}$$

ت.ع :
$$\tau = \frac{10^{-2,38}}{0,10} = 0,042 \Longrightarrow \boxed{\tau = 4,2\ \%}$$

بما ان $\tau < 1$ نستنتج ان تفاعل حمض الميثانويك مع الماء محدود.

3-2-تحديد قيمة $\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}}$:

حسب الجدول الوصفي : $[H_3O^+]_{éq} = [HCOO^-]_{éq} = \frac{x_{éq}}{V} = 10^{-pH}$

$$[HCOO^-]_{éq} = \frac{C_A.V - x_{éq}}{V} = C_A - \frac{x_{éq}}{V} = C_A - 10^{-pH}$$

$$\boxed{\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = \frac{10^{-pH}}{C_A - 10^{-pH}}} \Longrightarrow \frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = \frac{10^{-2,38}}{0,10 - 10^{-2,38}} \Longrightarrow \boxed{\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = 4,4.10^{-2}}$$

3.3-التحقق من قيمة pK_{A1} :

لدينا :
$$pH = pK_{A1} + \log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} \Longrightarrow pK_{A1} = pH - \log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}}$$

ت.ع :
$$pK_{A1} = 2,38 - \log(4,2.10^{-2}) \Longrightarrow \boxed{pK_{A1} = 3,74}$$

4-تعبير pH بدلالة pK_{A1} و pK_{A2} :

بالنسبة للمزدوجة $HCOOH/HCOO^-$:
$$pH = pK_{A1} + \log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}}$$

بالنسبة للمزدوجة $CH_3COOH/\ CH_3COO^-$:
$$pH = pK_{A2} + \log\frac{[CH_3COO^-]_{éq}}{[CH_3COOH]_{éq}}$$

الجدول الوصفي لتفاعل $HCOOH$ و CH_3COO^- :

معادلة التفاعل	$HCOOH_{(aq)}$ +	$CH_3COO^-_{(aq)}$	$\rightleftarrows$	$HCOO^-_{(aq)}$ +	$CH_3COO^-_{(aq)}$
الحالة البدئية	$C_1.V_1$	$C_1.V_1$	--	0	0
حالة التوازن	$C_1.V_1 - x_{éq}$	$C_1.V_1 - x_{éq}$	--	$x_{éq}$	$x_{éq}$

$$[HCOOH]_{éq} = [CH_3COO^-]_{éq} = \frac{C_1.V_1 - x_{éq}}{V} \;\; ; \;\; [HCOO^-]_{éq} = [CH_3COOH]_{éq} = \frac{x_{éq}}{V}$$

$$pH = pK_{A1} + log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} \Longrightarrow log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = pH - pK_{A1}$$

$$pH = pK_{A2} + log\frac{[HCOOH]_{éq}}{[HCOO^-]_{éq}} = pK_{A2} - log\frac{[HCOO^-]_{éq}}{[HCOOH]_{éq}} = pK_{A2} - (pH - pK_{A1})$$

$$2pH = pK_{A1} + pK_{A2} \Longrightarrow \boxed{pH = \frac{pK_{A1} + pK_{A2}}{2}}$$

- استنتاج قيمة pK_{A2} :

$$pH = \frac{pK_{A1} + pK_{A2}}{2} \Longrightarrow pK_{A1} + pK_{A2} = 2pH \Longrightarrow pK_{A2} = 2pH - pK_{A1}$$

$$pK_{A2} = 2 \times 4{,}25 - 3{,}74 \Longrightarrow \boxed{pK_{A2} = 4{,}76}$$

التمرين 2 : (2,5 نقط) الموجات –التحولات النووية

I – انتشار موجات ميكانيكية وموجات كهرمغنطيسية

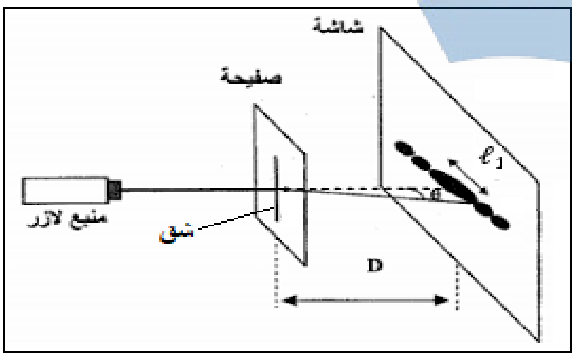
1-عدد الإثباتات الصحيحة: 1

2-1-الإثبات الصحيح:

خلال حيود موجة ميكانيكية متوالية دورية لا يتغير ترددها.

2-2-الموجة المنبعثة من مكبر الصوت:

ميكانيكية طولية.



1-3-تبيانة التركيب حيود موجة ضوئية:

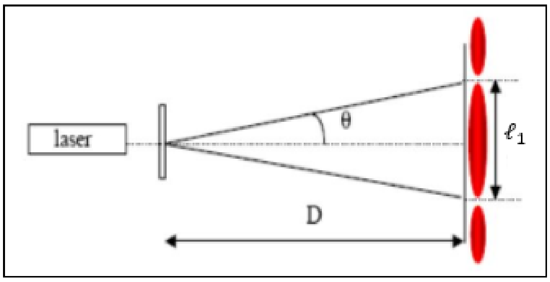
أنظر الشكل جانبه:

3-2-قيمة a عرض الشق:

حسب الشكل لدينا:

$tan\theta = \frac{\ell_1}{2D}$ بما ان $tan\theta \approx \theta \Longleftarrow \theta = \frac{\ell_1}{2D}$

لدينا : $\theta = \frac{\lambda_1}{a}$ ومنه: $\frac{\ell_1}{2D} = \frac{\lambda_1}{a}$



نستنتج: $a = \frac{2D.\lambda_1}{\ell_1}$

نعلم ان: $c = \lambda_1.f_1$ أي: $\lambda_1 = \frac{c}{f_1}$

نستنتج: $\boxed{a = \frac{2D.c}{\ell_1.f_1}}$

ت.ع: $a = \frac{2\times1{,}6\times3.10^8}{8.10^{-2}\times4{,}76.10^{14}} = 2{,}52.10^{-5}m \Longrightarrow \boxed{a = 25{,}2\ \mu m}$

3-3-كيف يتغير عرض البقعة المركزية؟

حسب العلاقة : $\frac{\ell}{2D}=\frac{\lambda}{a}$ أي : $\ell=\frac{2\lambda D}{a}$ بما ان $D=cte$ و $a=cte$ كلما تزايدت قيمة λ للضوء الأحادي اللون تزايد عرض البقعة المركزية ℓ.

$$\lambda_1=\frac{c}{f_1}=\frac{3.10^8}{4{,}76.10^{14}}=6{,}30.10^{-7}m=630\ nm$$

نلاحظ ان: $\lambda_2=450\ nm\ <\lambda_1$ وبالتالي عرض البقعة المركزية يتناقص.

II- نشاط البولونيوم

1-معادلة التفتت:

$$\mathbf{{}^{210}_{84}Po\longrightarrow {}^{A}_{Z}X+{}^{4}_{2}He}$$

حسب قانونا صودي:

$$\begin{cases}210=A+4\\84=Z+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=206\\Z=82\end{cases}\Rightarrow {}^{A}_{Z}X={}^{206}_{82}Pb$$

$$\mathbf{{}^{210}_{84}Po\longrightarrow {}^{206}_{82}Pb+{}^{4}_{2}He}$$

2-1-حساب $|E_1|$:

$$\boxed{E_1=[m({}^{206}_{82}Pb)+m({}^{4}_{2}He)-m({}^{210}_{84}Po)].c^2}$$

$$E_1=(205{,}930+4{,}00151-209{,}9374)u.c^2=-0{,}00589\ u.c^2$$

$$E_1=-0{,}00589\times 931{,}5MeV.c^{-2}.c^2=-5{,}487\ MeV$$

$$\boxed{|E_1|=5{,}49MeV}$$

2-2-استنتاج $|E_2|$:

$$N=\frac{m}{m({}^{210}_{84}Po)}\ (1)$$

$$\boxed{|E_2|=N.|E_1|=\frac{m}{m({}^{210}_{84}Po)}.|E_1|}$$

ت.ع:

$$|E_2|=\frac{10.10^{-3}}{209{,}9374\times1{,}6605.10^{-27}}\times5{,}49\times1{,}6.10^{-13}\Rightarrow\boxed{|E_2|=2{,}52.10^{10}\ J}$$

3-تحديد $t_{1/2}$ بالوحدة $jours$:

حسب قانون التناقص الاشعاعي:

$$a=a_0.e^{-\lambda.t}\ \Rightarrow\frac{a}{a_0}=e^{-\lambda.t}\ \Rightarrow-\lambda.t=log\left(\frac{a}{a_0}\right)$$

$$\frac{ln2}{t_{1/2}}.t=-ln\left(\frac{a}{a_0}\right)\ \Rightarrow\boxed{t_{1/2}=-\frac{ln2}{ln\left(\frac{a}{a_0}\right)}.\Delta t}$$

ت.ع :

$$t_{1/2}=-\frac{ln2}{ln\left(\frac{95}{100}\right)}\times\left(245+\frac{37}{60}\right)\times\frac{1}{24}\Rightarrow\boxed{t_{1/2}=138{,}3\ jours}$$

4-حساب الكتلة القصوية m_{max} :

حسب العلاقة (1) : $N = \frac{m}{m(^{210}_{84}Po)}$ و $N_{max} = \frac{m_{max}}{m(^{210}_{84}Po)}$

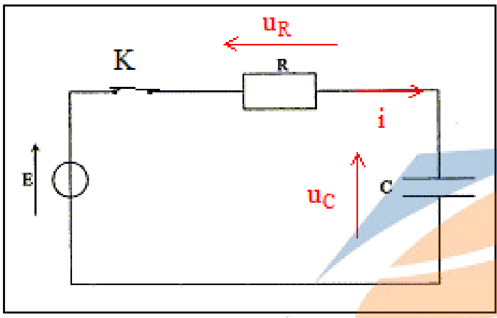
$$a_{max} = \lambda . N_{max} \Rightarrow a_{max} = \lambda . \frac{m_{max}}{m(^{210}_{84}Po)} \Rightarrow m_{max} = \frac{a_{max}.m(^{210}_{84}Po)}{\lambda}$$

$$\boxed{m_{max} = \frac{a_{max}.m(^{210}_{84}Po)}{ln2}.t_{1/2}}$$

ت.ع : $m_{max} = \frac{740\times209,9374\times1,6605.10^{-27}\times10^{3}\times138,3\times24\times3600}{ln2} \Rightarrow \boxed{m_{max} \approx 2,68.10^{-12}\ g}$

التمرين 3 : (5,5نقط) الكهرباء

الجزء I :



1-استجابة ثنائي القطب RC لرتبة توتر نازلة

1-1-المعاجدلة التفاضلية التي تحققها شدة التيار $i(t)$:

حسب قانون إضافية التوترات: $u_R + u_C = E$

حسب قانون أوم:

$$R.i + u_C = E \Rightarrow \frac{d(R.i)}{dt} + \frac{C}{C}\frac{du_C}{dt} = 0 \Rightarrow R.\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}.i = 0$$

$$\boxed{R.C\frac{di}{dt} + i = 0}$$

1-1-2-تعبير $i(t)$ بدلالة بارامترات الدارة:

$$i(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية: $-R.C.\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + A.e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \Rightarrow A.e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-R.C.\frac{1}{\tau} + 1\right) = 0$

$$-R.C.\frac{1}{\tau} + 1 = 0 \Rightarrow \tau = R.C$$

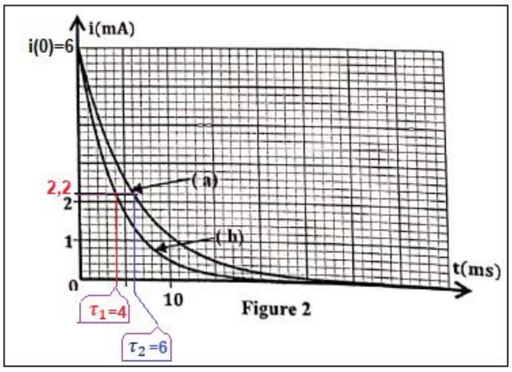
نحدد A بالشروط البدئية : $u_R(0) + u_C(0) = E$ أي : $R.i(0) + u_C(0) = E$

$u_C(0) = 0$ المكثف غير مشحون بدئيا ومنه: $i(0) = \frac{E}{R}$

$$\begin{cases} i(t) = A.e^{0} \\ i(0) = \frac{E}{R} \end{cases} \Rightarrow A = \frac{E}{R}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}}$$

1-2-1-منحنى المكثف ذي السعة C_1 :



حسب تعبير ثابتة الزمن $\tau = R.C$ كلما كانت قيمة C كبيرة كانت قيمة τ كبيرة أي ازدادت مدة الشحن. بما ان $C_2 > C_1$ فإن C_1 توافق ل أصغر قيمة ل τ وتوافق المنحنى (b).

2-2-1-لنبين ان $i = 2,2\ mA$ عند $t = \tau$:

$$i(\tau) = \frac{E}{R}.e^{-\frac{\tau}{R.C}} \Longrightarrow \boxed{i(\tau) = i(0).e^{-1}}$$

مبيانيا عند $t = 0$ نجد $i(0) = 6\ mA$

$$i(\tau) = 6e^{-1} \Longrightarrow \boxed{i(\tau) = 2,2\ mA}$$

3-2-1-لنبين ان $C_1 = 4\ \mu F$:

المكثفان C_1 و C_2 مركبان على التوازي سعتهما المكافئة تكتب:

$$C_1 = C_e - C_2 \Longleftarrow C_e = C_1 + C_2$$

حسب المنحنى (a) لدينا : $\tau_2 = 6\ ms$ مع : $\tau_2 = R.C_2$

حسب المنحنى (b) لدينا : $\tau_1 = 4\ ms$ مع : $\tau_1 = R.C_1$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R.C_2}{R.C_1} \Longrightarrow \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{C_2}{C_1} \Longrightarrow C_2 = \frac{6}{4}.C_1 = \frac{3}{2}C_1$$

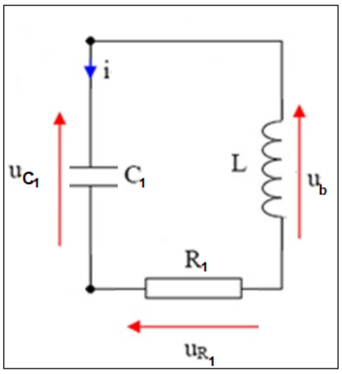
$$C_e = C_1 + C_2 \Longrightarrow C_1 + \frac{3}{2}C_1 = C_e \Longrightarrow \frac{5}{2}C_1 = C_e \Longrightarrow \boxed{C_1 = \frac{2}{5}.C_e} \Longrightarrow C_1 = \frac{2}{5} \times 10 \Longrightarrow \boxed{C_1 = 4\mu F}$$

4-2-1-تحديد قيمة كل من R و E :

لدينا : $\tau_1 = R.C_1$ أي: $\boxed{R = \frac{\tau_1}{C_1}}$ ت.ع: $R = \frac{4.10^{-3}}{4.10^{-6}} \Longrightarrow \boxed{R = 10^3\Omega}$

لدينا : $i(0) = \frac{E}{R}$ أي : $\boxed{E = i(0).R}$ ت.ع: $E = 6.10^{-3} \times 10^3 \Longrightarrow \boxed{E = 6\ V}$

2-تفريغ مكثف في وشيعة



1-2-المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_{R_1} :

حسب قانون إضافية التوترات:

$$u_b + u_{R_1} + u_{C_1} = 0 \Longrightarrow \frac{du_b}{dt} + \frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{du_{C_1}}{dt} = 0$$

$$L.\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{du_{R_1}}{dt} + \frac{1}{C_1}.i = 0$$

قانون اوم: $u_{R_1} = R_1.i \Longrightarrow i = \frac{1}{R_1}.u_{R_1}$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{d^2\left(\frac{1}{R_1}.u_{R_1}\right)}{dt^2} = \frac{1}{R_1}.\frac{d^2\,u_{R_1}}{dt^2}$$

$$\frac{L}{R_1}.\frac{d^2 u_{R_1}}{dt^2}+\frac{du_{R_1}}{dt}+\frac{1}{R_1.C_1}.u_{R_1}=0 \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2 u_{R_1}}{dt^2}+\frac{R_1}{L}\frac{du_{R_1}}{dt}+\frac{1}{L.C_1}.u_{R_1}=0}$$

2-2-تحديد قيمة R_1 :

عند t=0 لدينا : $u_b(0)+u_{R_1}(0)+u_{C_1}(0)=0$

لدينا : $u_{R_1}(0)=0$ و $u_{C_1}(0)=E$ وبالتالي : $u_b(0)=-E$

$$u_b=L.\frac{di}{dt}=\frac{L}{R_1}.\frac{du_{R_1}}{dt}$$

$$\frac{L}{R_1}.\frac{du_{R_1}}{dt}=-E \Longrightarrow \boxed{R_1=-\frac{L}{E}.\frac{du_{R_1}}{dt}}$$

$$R_1=-\frac{0,1}{6}.\left(\frac{0+0,2}{0-0,5.10^{-3}}\right) \Longrightarrow \boxed{R_1=6,67\ \Omega}$$

الجزء II : دراسة إشارة مضمنة الوسع

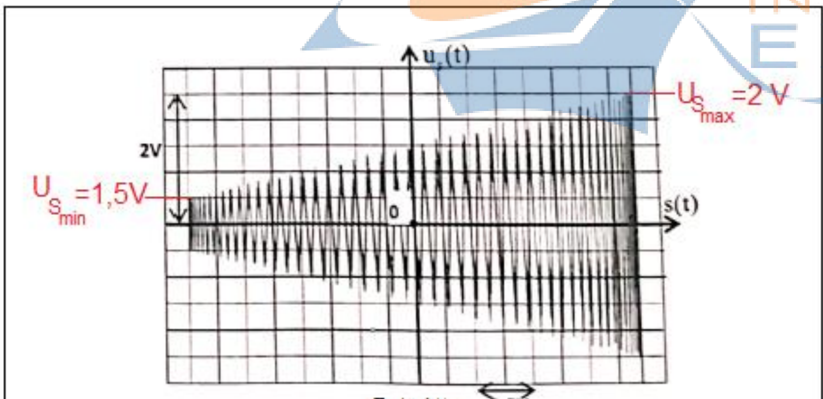
1-تحديد قيمة N_1 و N_2 :

$$\boxed{N_1=F-f} \Longrightarrow N_1=10^5-10^3 \Longrightarrow \boxed{N_1=9,9.10^4\ Hz}$$

$$\boxed{N_2=F+f} \Longrightarrow N_2=10^5+10^3 \Longrightarrow \boxed{N_2=1,01.10^5\ Hz}$$

2-تعبير m بدلالة S_m و U_0:

$$\boxed{m=\frac{S_m}{U_0}}$$



الشكل 5

3-1-تحديد m مبيانيا:

$$\boxed{m=\frac{U_{S_{max}}-U_{S_{min}}}{U_{S_{max}}+U_{S_{min}}}}$$

حيث:

$U_{S_{min}}=0,5\ V$ و $U_{S_{max}}=2V$

$$m=\frac{2-0,5}{2+0,5}=\frac{2}{3} \Longrightarrow \boxed{m\approx 0,67}$$

3-2-تحديد قيمة كل من U_m و U_0 :

حسب الشكل 5 لدينا: $S_m=2\ V$

$$m=\frac{S_m}{U_0} \Longrightarrow \boxed{U_0=\frac{S_m}{m}}$$

$$U_0=\frac{2}{\frac{2}{3}} \Longrightarrow \boxed{U_0=3\ V}$$

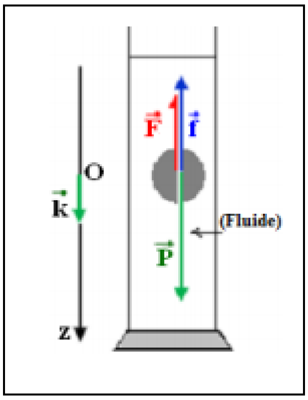
لدينا:
$$U_{S_{max}} = A(m+1) \Longrightarrow K.U_0.U_m(m+1) = U_{S_{max}}$$

$$\boxed{U_m = \frac{U_{S_{max}}}{K.U_0(m+1)}} \Longrightarrow U_m = \frac{2}{0{,}1 \times 3 \times \left(\frac{2}{3}+1\right)} \Longrightarrow \boxed{U_m = 4\ V}$$

تمرين 4 : (3,25 نقط) الميكانيك

الجزء I: حركة السقوط الراسي لكرية في سائل

1-المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة v :



المجموعة المدروسة: {الكرية}

جرد القوى:

$\vec{P}$: وزنها

$\vec{F}$: دافعة أرخميدس

$\vec{f}$: قوة احتكاك المائع

تطبيق القانون الثاني لنيوتن في المعلم المرتبط بالأرض والذي نعتبره غاليليا:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m.\vec{a}_G$$

إسقاط العلاقة المتجهية على المحور Oz :

$$P - F - f = m.a_z \Leftrightarrow \rho_S.V.g - \rho_\ell.V.g - 6\pi\eta.r.\mathrm{v} = \rho_S.V.\frac{d\,\mathrm{v}}{dt}$$

$$\frac{d\,\mathrm{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta.r}{\rho_S.V}.\mathrm{v} = \left(\frac{\rho_S.V}{\rho_S.V} - \frac{\rho_\ell.V}{\rho_S.V}\right).g \Longrightarrow \frac{d\,\mathrm{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta.r}{\rho_S.\frac{4}{3}.\pi.r^3}.\mathrm{v} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g$$

$$\frac{d\,\mathrm{v}}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_S.r^2}.\mathrm{v} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g$$

نضع :
$$\frac{1}{\tau} = \frac{9\eta}{2\rho_S.r^2} \Longrightarrow \tau = \frac{2\rho_S.r^2}{9\eta}$$

$$\boxed{\frac{d\,\mathrm{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}.\mathrm{v} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g}$$

2-تحديد اللزوجة η :

عندما تصل الكرية سرعتها الحدية المعادلة التفاضلية تكتب:

$$\frac{1}{\tau}.\mathrm{v}_{\ell im} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g \Longrightarrow \frac{9\eta}{2\rho_S.r^2}.\mathrm{v}_{\ell im} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g \Longrightarrow \boxed{\eta = \frac{2\rho_S.r^2.g}{9.\mathrm{v}_{\ell im}}.\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right)}$$

ت.ع :
$$\eta = \frac{2\times4490\times(6{,}3.10^{-3})^2\times9{,}81}{9\times1}.\left(1 - \frac{860}{4490}\right) \Longrightarrow \boxed{\eta = 0{,}314\ Pa.s}$$

3-قيمة $z(t)$ عند $t = 7\tau$:

لدينا: $$z(t) = V_{\ell im}\left[t + \tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)\right]$$

$$z(7\tau) = V_{\ell im}\left[7\tau + \tau\left(e^{-\frac{7\tau}{\tau}} - 1\right)\right] \Rightarrow z(7\tau) = \tau.V_{\ell im}\,[7 + (e^{-1} - 1)]$$

تعلم ان: $\frac{1}{\tau}.V_{\ell im} = \left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g$ أي: $\tau = \frac{V_{\ell im}}{\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g}$

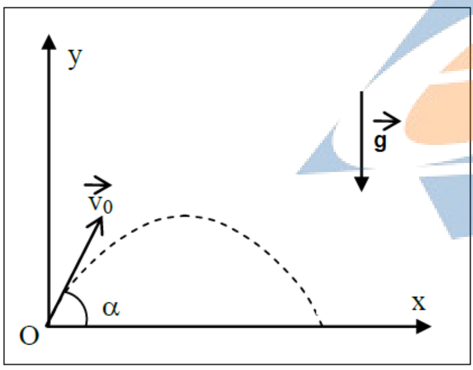
$$z(7\tau) = \tau.V_{\ell im}\,[7 + (e^{-1} - 1)] \Rightarrow \boxed{z(7\tau) = \frac{{V_{\ell im}}^2}{\left(1 - \frac{\rho_\ell}{\rho_S}\right).g}.[7 + (e^{-1} - 1)]}$$

ت.ع : $$z(7\tau) = \frac{1^2}{\left(1 - \frac{860}{4490}\right)\times 9{,}81}.[7 + (e^{-1} - 1)] = 0{,}803\ m \Rightarrow \boxed{z(7\tau) = 80{,}3\ cm}$$

كيف نفسر ارتفاع الانبوب $h = 90\ cm$ مناسب لقياس السرعة الحدية $V_{\ell im}$ للكرية؟

عند اللحظة $t = 7\tau$ تصل الكرية لسرعتها الحدية ويكون أنسوب الكرية هو $z(7\tau) = 80{,}3\ cm$ ،

وبما ان $z(7\tau) < h$ أي ان الكرية تصل إلى سرعتها الحدية قبل الوصول إلى قعر الانبوب.



الجزء II : حركة قذيفة في مجال الثقالة

1-المعادلتين الزمنيتين لحركة G :

المجموعة المدروسة: {القذيفة}

جرد القوى:

$\vec{P}$: وزن الجسم

تطبيق القانون الثاني لنيوتن في المعلم $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مرتبط بالأرض نعتبره غاليليا:

$$\vec{P} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}_G \Leftrightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$$

الاسقاط على المحور Ox و Oy :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{d\,V_x}{dt} \\ a_y = \frac{d\,V_y}{dt} \end{cases} \xrightarrow{\text{تكامل}} \begin{cases} V_x = C_1 \\ V_y = -g.t + C_2 \end{cases}$$

حسب الشروط البدئية:

$$\vec{V}_0 \begin{cases} C_1 = V_{0x} = V_0.cos\alpha \\ C_2 = V_{0y} = V_0.sin\alpha \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} C_3 = x_0 = 0 \\ C_4 = y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = V_0 . cos\alpha \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = -g.t + V_0 . sin\alpha \end{cases} \xrightarrow{\text{تكامل}} \begin{cases} x(t) = V_0 . cos\alpha . t + C_3 \\ y(t) = \dfrac{1}{2} g.t^2 + V_0 . sin\alpha . t + C_4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = V_0 . cos\alpha . t \\ y(t) = \dfrac{1}{2} g.t^2 + V_0 . sin\alpha . t \end{cases}}$$

2-معادلة المسار :

نقصي الزمن بين المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $y(t)$:

$$x = V_0 . cos\alpha . t \ \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 . cos\alpha}$$

$$y = \frac{1}{2} g . \left(\frac{x}{V_0 . cos\alpha}\right)^2 + V_0 . sin\alpha . \left(\frac{x}{V_0 . cos\alpha}\right)$$

$$\boxed{y = -\frac{g}{V_0^2 . cos^2\alpha} . x^2 + x . tan\alpha}$$

1-3-تحديد قيمة الزاوية α :

$$y_1 = -\frac{g}{2\, V_0^2 . cos^2\alpha} . {x_1}^2 + x_1 . tan\alpha$$

$$100 = -\frac{10}{2 \times 100^2} \times 400^2 \times \frac{1}{cos^2\alpha} + 400\ tan\alpha \ \Rightarrow -80(1 + tan^2\alpha) + 400\ tan\alpha - 100 = 0$$

$$tan^2\alpha - 5\ tan\alpha + 2{,}25 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5^2 - 4 \times 2{,}25} = 4$$

$$tan\alpha_1 = \frac{5-4}{2} = 0{,}5 \ \Rightarrow \alpha_1 = tan^{-1}(0{,}5) \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 26{,}56\ °}$$

$$tan\alpha_2 = \frac{5+4}{2} = 4{,}5 \ \Rightarrow \alpha_2 = tan^{-1}(4{,}5) \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 77{,}47\ °}$$

2-3-لنبين تعبير معادلة المنحنى (C) :

حسب معادلة المسار:

$$y = -\frac{g}{2\, V_0^2 . cos^2\alpha} . x^2 + x . tan\alpha = -\frac{g . x^2}{2\, V_0^2} . (1 + tan^2\alpha) + x . tan\alpha$$

$$y = -\frac{g . x^2}{2\, V_0^2} . tan^2\alpha + x . tan\alpha - \frac{g . x^2}{2\, V_0^2}$$

$$\frac{d\, y}{d\, tan\alpha} = -\left(\frac{g . x}{V_0^2} . tan\alpha + 1\right) x = 0 \ \Rightarrow tan\alpha = \frac{V_0^2}{g . x}$$

نعوض $\tan\alpha$ في معادلة المسار:

$$y = -\frac{g.x^2}{2\,V_0^2}.\left(\frac{V_0^2}{g.x}\right)^2 + \cancel{x}.\left(\frac{V_0^2}{g.\cancel{x}}\right) - \frac{g.x^2}{2\,V_0^2} = -\frac{g.\cancel{x^2}.V_0^4}{2\,V_0^2.g^2.\cancel{x^2}} + \frac{V_0^2}{g} - \frac{g}{2\,V_0^2}.x^2$$

$$y = -\frac{V_0^2}{2g} + \frac{V_0^2}{g} - \frac{g}{2\,V_0^2}.x^2 \Longrightarrow \boxed{y(x) = -\frac{g}{2\,V_0^2}.x^2 + \frac{V_0^2}{2g}}$$